Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
1$^{\text{er}}$ Examen Parcial (30 %)
Ene-Mar 2023

Duración 1 hora 50 minutos

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Pregunta 1.(3 ptos c/u) Resuelva:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin(3x^2)))}{1-\cos(2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sec(3x)\tan(x)$

Pregunta 2.(3 ptos) Dado que f es continua y diferenciable en $(0,+\infty)$ y satisface que $f(1)=0$ y $f'(x)=\dfrac{1}{x}$; si

$$g(x) = \frac{x^2}{2\pi} - \cos(x) + xf\left(\frac{x}{\pi}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Halle $(g^{-1})'(1)$

Pregunta 3.(6 ptos) Se desea fabricar un cono circular recto de generatriz igual a 20 cm. Halle la altura de este cono para que su volumen sea el máximo posible.

Pregunta 4.(20 ptos) Sea $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ hallar:

a) Dominio

b) Cortes con los ejes

c) Primera derivada

d) Segunda derivada

e) Puntos máximos y mínimos

f) Puntos de inflexión

g) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

h) Intervalos de concavidad

i) Asíntotas

j) Gráfica

Pregunta 1. Solución a.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin(3x^2)))}{1-\cos(2x)}$$

Evaluando tenemos que:

$$\frac{\sin(\sin(\sin(3(0)^2)))}{1-\cos(2(0))} = \frac{\cancelto{0}{\sin}(\cancelto{0}{\sin}(\cancelto{0}{\sin(3(0)^2)}))}{1-\cancelto{0}{\cos(2(0))}} = \frac{0}{0} \quad \color{red}{\to \text{Indeterminación}}$$

Levantamos indeterminación:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin(3x^2)))}{\color{blue}{\sin(\sin(3x^2))}}\cdot\frac{\color{blue}{\sin(\sin(3x^2))}}{1-\cos(2x)}$$

Por propiedad de limites: $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin(3x^2)))}{\sin(\sin(3x^2))}\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(\sin(3x^2))}{\color{blue}{\sin(3x^2)}}\cdot\frac{\color{blue}{\sin(3x^2)}}{1-\cos(2x)}\right]$$

Sean los siguientes cambios de variables:

Sea $u=\sin(\sin(3x^2))$ si $x\to 0 \quad \Rightarrow u\to 0$	Sea $t=\sin(3x^2)$ si $x\to 0 \quad \Rightarrow t\to 0$

$$\overset{\text{C.V}}{\Rightarrow} \lim_{u\to 0}\cancelto{1}{\frac{\sin(u)}{u}}\cdot\lim_{u\to 0}\cancelto{1}{\frac{\sin(t)}{t}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2)}{1-\cos(2x)}$$

$$\overset{\text{L'H}}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{6x\cos(3x^2)}{2\sin(2x)} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\cos(3x^2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Asi, } \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin(3x^2)))}{1-\cos(2x)} = \frac{3}{2}$$

Pregunta 1.<u>Solución b.</u>

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\sec(3x)\tan(x)$$

Evaluando tenemos que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cancelto{0}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)^2}\cancelto{\pm\infty}{\sec(3x\frac{\pi}{2})\tan(\frac{\pi}{2})}=0\cdot\infty\textcolor{red}{\to\text{ Indeterminación}}$$

Levantamos la indeterminación, reescribiendo el límite, se tiene:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\sec(3x)\tan(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\textcolor{red}{\operatorname{sen}(x)}}{\textcolor{blue}{\cos(3x)}\textcolor{red}{\cos(x)}}$$

Por propiedad de limites: $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$

$$=\cancelto{1}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos(3x)\cos(x)}$$

$$\overset{\text{L'H}}{\Rightarrow}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-3\operatorname{sen}(3x)\cos(x)-\cos(3x)\sin(x)}$$

$$\overset{\text{L'H}}{\Rightarrow}-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3(3\cos(3x)\cos(x)-\sin(3x)\sin(x))+(-3\sin(3x)\sin(x))+(\cos(3x)\cos(x))}$$

$$\Rightarrow-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-6\sin(3x)\sin(x)+10\cos(3x)\cos(x)}\overset{\text{S.I}}{=}\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$$

$$\text{Asi, }\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\sec(3x)\tan(x)=\frac{-1}{3}$$

Pregunta 2.<u>Solución</u>

Tenemos que la derivada de la función inversa viene dada por

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

En este caso,

$$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(\underbrace{g^{-1}(1)}_{x_0})}, \quad \exists x_0 = g^{-1}(1) \Rightarrow g(x_0) = 1$$

Donde,

Buscamos que $f(x/\pi) = f(1)$ para ello $x = \pi$, tal que,

$$g(\pi) = \frac{\pi^2}{2\pi} - \cancelto{-1}{\cos(\pi)} + \pi f(\frac{\pi}{\pi}) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 1 + \pi \cancelto{0}{f(1)} - \frac{\pi}{2} = 1$$

Si $g(\pi) = 1$ entonces $g^{-1}(1) = \pi$

Además,

$$g'(x) = \frac{2x}{2\pi} + \sin(x) + \left[f\left(\frac{x}{\pi}\right) + x f'\left(\frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right) \right]$$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\frac{x}{\pi}}$ entonces,

$$g'(x) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) + \left[f\left(\frac{x}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{\frac{x}{\pi}}\right) \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right) \right]$$

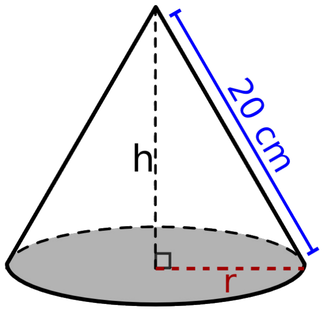
$$g'(x) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) + f\left(\frac{x}{\pi}\right) + 1$$

Evaluando π se tiene:

$$g'(\pi) = \cancelto{1}{\frac{\pi}{\pi}} + \cancelto{0}{\sin(\pi)} + \cancelto{0}{f\left(\frac{\pi}{\pi}\right)} + 1 \;\Rightarrow\; g'(\pi) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{Asi, } (g^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$$

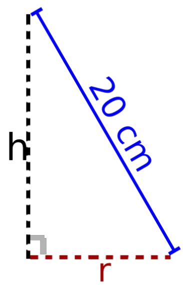
Pregunta 3. Solución



- La función que se desea optimizar es el Volumen del cono, asi:

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{(r,h)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow \text{Función Objetivo}$$



- Por el Teorema de Pitágoras, hallamos una relación entre h y r, tal que

$$(20)^2 = h^2 + r^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{r^2 = (20)^2 - h^2}_{\text{Ecuación de Apoyo}}$$

Asi al reescribir la función objetivo respecto de h se tiene la función

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi \left[(20)^2 - h^2\right] h = \frac{\pi}{3}\left[(20)^2 h - h^3\right]$$

Con dominio admisible dado por $\text{Dom}_{\text{adm}} V(h) : [0, 20]$

$$\overset{\frac{dy}{dx}}{\Rightarrow} V'(h) = \frac{\pi}{3}\left[(20)^2 - 3h^2\right]$$

Buscamos las raíces de $V'(h)$, ya que son posibles máximos o mínimos

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{3}\left[(20)^2 - 3h^2\right] &= 0 \\
\left[(20)^2 - 3h^2\right] &= 0 \\
(20)^2 &= 2h^2 \\
h &= \pm\sqrt{\frac{(20)^2}{3}}, \text{ como } h > 0 \\
h &= \sqrt{\frac{(20)^2}{3}}
\end{aligned}$$

Comprobamos que sea un máximo con el criterio de la segunda derivada. En general si $V''(h) < 0$ es un máximo. En este caso,

$$\overset{\frac{dy}{dx}}{\Longrightarrow} V''(h) = -2\pi h$$

Evaluando $h = \sqrt{\dfrac{(20)^2}{3}}$ en $V''(h) = -2\pi h$, tenemos

$$V''(h) = -2\pi\sqrt{\frac{(20)^2}{3}}$$

Como $\sqrt{\dfrac{(20)^2}{3}} > 0$ y $-2pi > 0$, entonces $V''(h) > 0$ por lo que $h = \sqrt{\dfrac{(20)^2}{3}}$ es un máximo

Asi, se tiene que si $h = \sqrt{\dfrac{(20)^2}{3}}$ el cono tendrá el máximo volumen posible.

Pregunta 4.<u>Solución</u>

(a) $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - 1$

(b)

- <u>Corte con el eje x</u>, si $y = 0$ entonces $\dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

  Asi el punto de corte con el eje x es $(\frac{1}{2}, 0)$

- <u>Corte con el eje y</u>, si $x = 0$ entonces $y = \dfrac{2(0)-1}{((0)-1)^2} \Rightarrow y = \dfrac{-1}{1} \Rightarrow y = -1$

  Asi el punto de corte con el eje y es $(0, -1)$

(c) Derivando $f(x)$ respecto de x nos queda

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)2(x-1)}{\left[(x-1)^2\right]^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)\left[2(x-1) - 2(2x-1)\right]}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2 - 4x + 2}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x-1)^3} \quad \rightarrow \text{Dom} f'(x) = \mathbb{R} - 1$$

(d) Derivando $f'(x)$ respecto de x nos queda

$$f''(x) = -2\left[\frac{(x-1)^3 - 3x(x-1)^2}{\left[(x-1)^3\right]^2}\right]$$

$$f''(x) = -2\left[\frac{(x-1)^2\{x - 1 - 3x\}}{(x-1)^6}\right]$$

$$f''(x) = -2\left[\frac{-2x-1}{(x-1)^4}\right]$$

$$f''(x) = 2\left[\frac{2x+1}{(x-1)^4}\right] \quad \rightarrow \text{Dom} f''(x) = \mathbb{R} - 1$$

(e) En general. Los máximos y mínimos son los puntos donde $f'(x) = 0$. En este caso,

$$\frac{-2x}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0,$$

Evaluando $x = 0$ en $f''(x)$ nos queda

$$f''(x) = 2\left[\frac{2x+1}{(x-1)^4}\right] = 2\left[\cancelto{1}{\frac{1}{(-1)^4}}\right] = 2$$

Como $f''(0) > 0$ tenemos que $x = 0$ es un punto mínimo.

(f) En general. Los puntos de inflexión son los puntos donde $f''(x) = 0$. En este caso,

$$2\left[\frac{2x+1}{(x-1)^4}\right] = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

(g) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, estudiamos los signos de $f'(x)$ tal que

$-\infty$	0	1	∞
-1	$-$	$-$	$-$
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Asi,

- $f(x)$ crece, $\forall x \in (0, 1)$
- $f(x)$ decrece, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

(h) Para determinar los intervalos de concavidad, estudiamos los signos de $f''(x)$ tal que

$-\infty$	$-1/2$	1	∞
2	$+$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)^4$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

Asi,

- $f(x)$ crece, $\forall x \in (0, 1)$
- $f(x)$ decrece, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

(i) Estudiamos los distintos tipos de Asíntotas:

- Horizontales

$$\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{(1-\frac{1}{x})^2} \overset{\text{SI}}{=} \frac{0}{1} = 0$$

$$\cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{(1-\frac{1}{x})^2} \overset{\text{SI}}{=} \frac{0}{1} = 0$$

- Oblicuas Al poseer Asíntotas Horizontales no puede poseer Asíntotas Oblicuas

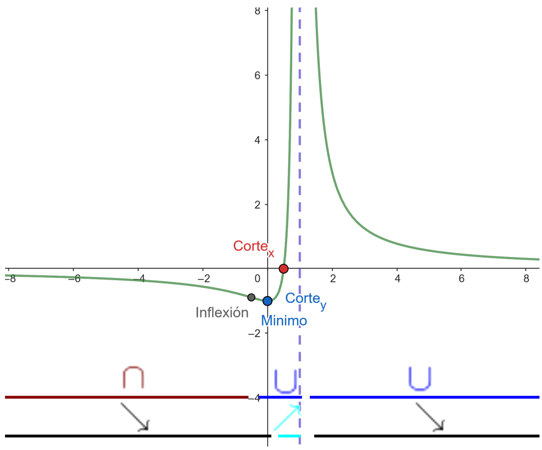
- <u>Verticales</u> Estudiamos el punto que se encuentra fuera del dominio ($x = 1$)

$$\cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-1}{(x-1)^2} \overset{\text{SI}}{=} \frac{\overbrace{2(1^-)-1}^{+}}{\underbrace{((1^-)-1)^2}_{+}} = \infty$$

$$\cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-1}{(x-1)^2} \overset{\text{SI}}{=} \frac{\overbrace{2(1^+)-1}^{+}}{\underbrace{((1^+)-1)^2}_{+}} = \infty$$

Asi tenemos que existe una Asíntota Vertical en $x = 1$

(j) Gráfica:



Este examen fue digitalizado en LaTeXpor **César García** para **GECOUSB**

César García
21-10225
Ing. Electrónica

gecousb.com.ve

Cualquier error de tipeo o en la resolución de los ejercicios, notificar a **21-10225@usb.ve**